岡山大学経済学会雑誌30(3),1999，271～280

誤差分散のスタイン型改良信頼区間の最適性について

永　田　　　靖

1．はじめに

通常の回帰モデル

$$y = X\beta + \varepsilon,\ \ \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \tag{1}$$

を考える。yは$n\times 1$ベクトル，Xは$n\times k$行列でランクはk，βは$k\times 1$ベクトルで，εは$n\times 1$の誤差ベクトルで正規分布 $N(0,\sigma^2 I_k)$ に従うとする。$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$，$e=y-X\hat{\beta}$と表すとき，$\sigma^2$の通常の区間推定は，

$$I_0 = \left(\frac{e'e}{c_2},\ \frac{e'e}{c_1}\right) \tag{2}$$

という形で行う（c_1 と c_2 は $c_1 < c_2$ となる適当な定数)。

この I_0 を改良する信頼区間として，Nagata(1989, 1995)は

$$I_S(a) = \left(\frac{min\{e'e, e^{*\prime}e^*/a\}}{c_2},\ \frac{min\{e'e, e^{*\prime}e^*/a\}}{c_1}\right) \tag{3}$$

を考えた。ここで，$e^*=y-X\hat{\beta}^*$，$\hat{\beta}^*=\hat{\beta}+(X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(r-R\hat{\beta})$である（$R$ および r は後で定義する $p\times k$ 行列および $p\times 1$ ベクトルである)。定数a^*を

$$a^* = \frac{(n-k+p)log(c_2/c_1)}{c_2-c_1} \tag{4}$$

と表すとき，Nagata(1995)は次の定理を示した。

定理1（Nagata(1995)）　$a^* > 1$であるなら，すべての$a \in (1, a^*]$に対して$Pr(\sigma^2 \in I_S(a)) > Pr(\sigma^2 \in I_0)$である。さらに，$Pr(\sigma^2 \in I_S(a))$は$a \in (1, a^*]$について狭義の意味で単調増加する。

$I_S(a)$ は I_0 に対して，信頼区間幅は小さくなり，信頼区間の上限と下限の比は同じになっている点にも注意する。信頼区間 $I_S(a^*)$ をスタイン型改良信頼区間とよぶ。

(3)式の信頼区間は次のようなアイディアに基づいている。βに関する次のような仮説

$$H_0 : R\beta = r \quad \text{vs.} \quad H_1 : R\beta \neq r \tag{5}$$

を考える。Rは既知の$p \times k$行列でそのランクはpであり，rは既知の$p \times 1$ベクトルである。この仮説の通常の検定統計量は

$$\begin{aligned} F &= \frac{(R\hat{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r)/p}{e'e/(n-k)} \\ &= \frac{(e^{*\prime}e^* - e'e)/p}{e'e/(n-k)} \end{aligned} \tag{6}$$

であり，検定統計量Fは自由度$(p, n-k)$で非心パラメータが$\lambda = (R\beta - r)'[R(X'X)^{-1}\ R']^{-1}(R\beta - r)/\sigma^2$の非心F分布に従う。信頼区間 $I_S(a)$ において

$$min\{e'e, e^{*\prime}e^*/a\} = \begin{cases} e'e & \text{if } F \geq (a-1)(n-k)/p \\ e^{*\prime}e^*/a & \text{if } F < (a-1)(n-k)/p \end{cases} \tag{7}$$

となる。したがって，信頼区間 $I_S(a)$ は，(5)の仮説を予備検定して，その結果に基づいて信頼区間を構成していることになる。

定理1は，信頼区間のクラス $\{I_S(a) : 1 < a \leq a^*\}$ のなかで，スタイン型改良信頼区間 $I_S(a^*)$ が信頼確率の意味で最良であることを意味している。(7)

式に基づいて，$(a^*-1)(n-k)/p$ に対応する有意水準を予備検定におけるセミオプティマル・レベルとよぶ。

本稿では，このクラスを広げて，クラス $\{I_S(a) : 1 < a \leq \infty\}$ を考えて，この中でスタイン型改良信頼区間の最適性を検討する。$a > a^*$ の場合には，$I_S(a)$ と $I_S(a^*)$ の間には λ に関して一様な優越性の関係は存在しないことを示す。(σ^2 の点推定量についても同様な関係が存在する（Ohtani(1988), Nagata(1997b) を参照)。)

スタイン型改良信頼区間に関するこの他の性質については Nagata(1995, 1996, 1997a) を参照されたい。また，このタイプの統計的推測上の問題に関しては，Maata and Casella(1990), Kubokawa(1994) なども参照されたい。

2．スタイン型改良信頼区間の最適性

$m = n-k$ とおく。Nagata(1995) は，$min\{e'e/\sigma^2, e^{*\prime}e^*/(a\sigma^2)\}$ の分布関数として次式を導いた。

$$\begin{aligned} F(c;a) &\equiv Pr\left(min\left\{\frac{e'e}{\sigma^2}, \frac{e^{*\prime}e^*}{a\sigma^2}\right\} \leq c\right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K_l'}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{p}{2}+l\right)} \int_0^{1/a} z^{\frac{m}{2}-1}(1-z)^{\frac{p}{2}+l-1} \\ &\qquad\qquad \times P\left(\frac{m+p}{2}+l, \frac{c}{2z}\right) dz \\ &\quad + \sum_{l=0}^{\infty} K_l \left\{1 - I_{1/a}\left(\frac{m}{2}, \frac{p}{2}+l\right)\right\} P\left(\frac{m+p}{2}+l, \frac{ac}{2}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

ここで，

$$K_l = \frac{exp(-\lambda/2)(\lambda/2)^l}{l!} \tag{9}$$

であり，$P(\cdot,\cdot)$ は不完全ガンマ関数である（Abramowitz & Stegun(1972))。

表1　$I_S(a)$ の信頼確率（$(m,p)=(5,1)$ の場合）

α	a	λ							
		0	1	2	3	5	10	15	20
.01	4.2516	.7373	.8019	.8497	.8847	.9288	.9669	.9734	.9738
.05	2.3216	.9198	.9383	.9505	.9583	.9663	.9674	.9618	.9566
.10	1.8120	.9499	.9577	.9622	.9643	.9649	.9591	.9540	.9515
.15	1.5776	.9589	.9620	.9631	.9630	.9609	.9548	.9516	.9505
.20	1.4356	.9617	.9623	.9617	.9605	.9577	.9526	.9507	.9502
.2328*	1.3683**	.9621	.9616	.9604	.9589	.9561	.9518	.9504	.9501
.25	1.3384	.9620	.9611	.9597	.9581	.9554	.9515	.9503	.9501
.30	1.2672	.9611	.9594	.9577	.9561	.9537	.9509	.9502	.9500
.50	1.1056	.9551	.9535	.9525	.9517	.9508	.9501	.9500	.9500
.70	1.0333	.9512	.9507	.9505	.9503	.9501	.9500	.9500	.9500

∗：セミオプティマル・レベル，∗∗：a^* の値

表2　$I_S(a)$ の信頼確率（$(m,p)=(5,3)$ の場合）

α	a	λ							
		0	1	2	3	5	10	15	20
.01	8.2360	.5509	.6345	.7043	.7616	.8453	.9413	.9672	.9733
.05	4.2454	.8869	.9130	.9315	.9446	.9602	.9726	.9742	.9735
.10	3.1714	.9410	.9521	.9596	.9646	.9701	.9729	.9704	.9659
.20	2.3518	.9644	.9678	.9698	.9708	.9709	.9661	.9599	.9552
.30	1.9630	.9695	.9701	.9699	.9691	.9667	.9594	.9542	.9516
.3519*	1.8244**	.9700	.9696	.9686	.9673	.9641	.9568	.9527	.9509
.40	1.7188	.9697	.9685	.9670	.9653	.9617	.9550	.9517	.9505
.50	1.5442	.9673	.9651	.9630	.9610	.9575	.9525	.9507	.9502
.70	1.2984	.9593	.9571	.9554	.9540	.9522	.9505	.9501	.9500

∗：セミオプティマル・レベル，∗∗：a^* の値

表3 $I_S(a)$ の信頼確率（$(m,p)=(15,3)$ の場合）

α	a	λ 0	1	2	3	5	10	15	20
.01	2.0834	.7875	.8254	.8565	.8817	.9181	.9587	.9674	.9660
.05	1.6574	.9142	.9296	.9409	.9491	.9589	.9635	.9594	.9551
.10	1.4980	.9424	.9504	.9558	.9591	.9619	.9593	.9548	.9520
.20	1.3498	.9572	.9595	.9605	.9605	.9592	.9544	.9516	.9505
.30	1.2672	.9600	.9600	.9593	.9583	.9562	.9522	.9507	.9502
.3197*	1.2544**	.9601	.9597	.9589	.9578	.9557	.9520	.9506	.9501
.35	1.2362	.9600	.9593	.9582	.9571	.9550	.9516	.9504	.9501
.40	1.2096	.9595	.9584	.9572	.9560	.9539	.9511	.9503	.9501
.50	1.1652	.9577	.9563	.9551	.9540	.9524	.9506	.9501	.9500
.70	1.0963	.9536	.9526	.9519	.9514	.9507	.9501	.9500	.9500

*：セミオプティマル・レベル，**：a^* の値

表4 $I_S(a)$ の信頼確率（$(m,p)=(15,5)$ の場合）

α	a	λ 0	1	2	3	5	10	15	20
.01	2.5187	.7290	.7725	.8094	.8405	.8878	.9478	.9666	.9706
.05	1.9670	.8991	.9170	.9308	.9414	.9554	.9673	.9661	.9616
.10	1.7577	.9372	.9468	.9537	.9587	.9642	.9652	.9605	.9560
.20	1.5600	.9582	.9616	.9636	.9645	.9643	.9595	.9548	.9520
.30	1.4473	.9634	.9641	.9639	.9633	.9612	.9556	.9523	.9508
.35	1.4047	.9640	.9638	.9631	.9621	.9596	.9543	.9516	.9505
.3638*	1.3938**	.9640	.9637	.9628	.9617	.9592	.9540	.9514	.9505
.40	1.3673	.9638	.9631	.9620	.9607	.9581	.9533	.9511	.9503
.50	1.3037	.9623	.9608	.9594	.9579	.9555	.9518	.9505	.9501
.70	1.2004	.9570	.9555	.9543	.9533	.9519	.9505	.9501	.9500

*：セミオプティマル・レベル，**：a^* の値

(8)式に基づいて，$m = 5,\ 15,\ 25$ ，$p = 1,\ 3,\ 5$ の場合に，a および λ の値を様々に変化させて $I_S(a)$ の信頼確率を数値計算した。なお，定数 c_1 ，c_2 は I_0 が信頼率95%の等確率信頼区間となるように設定している。すなわち，$c_1 = \chi^2(m, 0.975)$ ，$c_2 = \chi^2(m, 0.025)$ である（$\chi^2(m, \alpha)$ は自由度 m の上側 100α %点）。すべての場合に定性的な性質は同じであったので，$(m, p) = (5, 1)$，$(5, 3)$，$(15, 3)$，$(15, 5)$ の結果を表1から表4に示す。

表1から表4より次のことを観察することができる。

(A) 第1節で述べた定理の内容を確認することができる。すなわち，λ を任意に固定したとき，すべての $a \in (1, a^*]$ に対して $Pr(\sigma^2 \in I_S(a)) > Pr(\sigma^2 \in I_0)(= .950)$ である。さらに，$Pr(\sigma^2 \in I_S(a))$ は $a \in (1, a^*]$ について狭義の意味で単調増加する。

(B) $a > a^*$ の場合は，ある λ_0 があって，$\lambda < \lambda_0$ に対しては $Pr(\sigma^2 \in I_S(a)) < Pr(\sigma^2 \in I_S(a^*))$ であり，$\lambda > \lambda_0$ に対しては $Pr(\sigma^2 \in I_S(a)) > Pr(\sigma^2 \in I_S(a^*))$ である。

(C) 予備検定の有意水準が小さい場合には，λ の値が小さいとき $I_S(a)$ の値は名目の信頼確率（0.950）を下回る。

ここで，上の(B)の内容を $\lambda = 0$ の場合に解析的に証明することができる。以下，その証明を述べる。

まず，次の補助定理が必要である。

補助定理（Nagata(1989)）　$\chi^2(\nu)$ に従う確率変数 x に対して

$$g_\nu(a) = Pr(ac_1 < x < ac_2), \quad (\ a > 0\ )$$

とおく。また，$a(\nu) = \nu \log(c_2/c_1)/(c_2 - c_1)$ とおく。このとき，$g_\nu(a)$ は $a \in (0, a(\nu))$ について単調増加であり，$a \in (a(\nu), 0)$ について単調減少

である。

$v=e'e/\sigma^2$，$w=(e^{*\prime}e^*-e'e)/\sigma^2$ とおくと，v は $\chi^2(m)$ に従い，w は $\chi^2(p)$ ($\lambda=0$ の場合を考えている) に従う。ここで，$y=v+w$，$z=v/(v+w)$ とおくと，y は $\chi^2(m+p)$ に従い，z はパラメータ $(m/2,p/2)$ のベータ分布に独立に従う ($\lambda=0$ であることに再び注意)。

$a>a^*$ とすると，次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\Delta &= Pr(\sigma^2\in I_S(a))-Pr(\sigma^2\in I_S(a^*))\\
&= Pr\left(\frac{c_1}{z}<y<\frac{c_2}{z},\ z\le\frac{1}{a}\right)+Pr\left(ac_1<y<ac_2,\ z>\frac{1}{a}\right)\\
&\qquad -Pr\left(\frac{c_1}{z}<y<\frac{c_2}{z},\ z\le\frac{1}{a^*}\right)-Pr\left(a^*c_1<y<a^*c_2,\ z>\frac{1}{a^*}\right)\\
&= \Delta_1+\Delta_2 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= Pr\left(ac_1<y<ac_2,\ \frac{1}{a}<z\le\frac{1}{a^*}\right)\\
&\qquad -Pr\left(\frac{c_1}{z}<y<\frac{c_2}{z},\ \frac{1}{a}<z\le\frac{1}{a^*}\right)\\
\Delta_2 &= Pr\left(ac_1<y<ac_2,\ z>\frac{1}{a^*}\right)\\
&\qquad -Pr\left(a^*c_1<y<a^*c_2,\ z>\frac{1}{a^*}\right)
\end{aligned}
$$

である。

y が $\chi^2(m+p)$ に従うこと，$a^*=(m+p)\log(c_2/c_1)/(c_2-c_1)$ であることに注意すれば，補助定理より $\Delta_1<0$，$\Delta_2<0$ となることがわかる。

以上より，次の結果を得る。

定理2 $a>a^*$ のとき，$\lambda=0$ に対して $Pr(\sigma\in I_S(a))<Pr(\sigma\in I_S(a^*))$ が成り立つ。

以上より，スタイン型改良信頼区間 $I_S(a^*)$ は，クラス $\{I_S(a) : a > a^*\}$ のメンバー $I_S(a)$ とは λ について互いに一様な優越性を有していない。すなわち，スタイン型改良信頼区間 $I_S(a^*)$ はクラス $\{I_S(a) : 1 < a \leq a^*\}$ の中ではすべての λ について最良であるけれども，それより広いクラスでの最良性は成り立たない。

参考文献

Abramowitz, M. and Stegun, I.A.(1972). *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications.

Kubokawa, T.(1994). A unified approach to improving equivariant estimators, *Annals of Statistics*, **22**, 290–299.

Maatta, J.M. and Casella, G.(1990). Developments in decision-theoretic variance estimation, *Statistical Science*, **5**, 90–101.

Nagata, Y.(1989). Improvements of interval estimations for the variance and the ratio of two variances, *Journal of the Japan Statistical Society*, **19**, 151–161.

Nagata, Y.(1995). The relationship between the improvement on the point estimation and the improvement on the interval estimation for the disturbance variance in a linear regression model, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **24**, 1687–1704.

Nagata, Y.(1996). The Neyman accuracy and the Wolfowitz accuracy of the Stein type confidence interval for the disturbance variance, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **25**, 985–1004.

Nagata, Y.(1997a). Stein type confidence interval of the disturbance variance in a linear regression model with multivariate Student–t distributed errors, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **26**, 503–523.

Nagata, Y.(1997b). Optimality of the Stein-type estimator for variance, *The Japanese Economic Review*, **48**, 113–117 .

Ohtani, K.(1988). Optimal levels of significance of a pre-test in estimating the disturbance variance after the pre-test for a linear hypothesis on coefficients in a linear regression, *Economics Letters*, **28**, 151–156.

Optimality of the Stein Type Confidence Interval of Variance

Yasushi Nagata

In this paper the optimality of the Stein type confidence interval of the disturbance variance among the class of pre–test confidence interval after the pre–test for a linear hypothesis on coefficients is considered. The Stein type confidence interval is a member in the class with a critical value, say c. It is known that the Stein type confidence interval is the best in the subclass which consists of the pre–test confidence intervals with a smaller critical value than c. It is shown that an extension of the optimality to a larger class is not possible.